

非正交多重调制研究

曹祁生, 梁德群

(大连海事大学信息工程学院信号与图像处理研究室, 辽宁大连 116026)

摘要: 本文提出一种新的调制方法——非正交多重调制 (NOMM), 并利用信号估计理论对其进行分析. 在此基础上, 以信号星座图为工具, 构造出多种优良的调制方法, 并分析了相应的差错性能和频带利用率. 数值计算结果表明, 由于突破了正交的限制, 从而使这些全新的多重调制方法较之传统方法有更高的频带利用率. 不仅在实际上提出了更有效的方法, 也从理论上为调制技术指出了更宽的发展方向.

关键词: 数字通信; 非正交调制; 信号星座图; 频带利用率

中图分类号: TN911.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0019-05

Study on Non-orthogonal Multiple Modulation

CAO Qisheng LIANG Derqun

(Department of Information Engineering, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026 China)

Abstract A novel modulation technique is proposed in this paper Non-orthogonal Multiple Modulation (NOMM). Based on estimation theory analysis various well-performed modulation methods are presented in terms of signal constellations. Relevant error probability and bandwidth efficiency are also discussed. The result of numerical experiments shows that these completely new multiple modulations outperform the conventionals in bandwidth efficiency which is owed to the unrestrainedness in orthogonality. NOMM offers a more effective method in practice and indicates a broad perspective of development for modulation techniques in theory as well.

Key words digital communication; non-orthogonal modulation; signal constellations; bandwidth efficiency

1 引言

数字通信系统中, 正交性占有非常重要的地位, 主要体现在两个方面: (a) 以调幅信号为例, 对符号序列经调制器映射得到的波形进行观测, 有

$$y(t) = \sum_k x_k g(t - kT_s) \quad (1)$$

其中, x_k 与传送的第 k 个符号有关. 传统的实现中要求 $g(t - kT_s)$ 之间必须是相互正交的; (b) 在正交调制系统中, 比如 MFSK, 还存在信号集合内的正交. 观测单个符号映射后波形, 得

$$y(t) = g_i(t) = \sum_k \delta(i - k) g_k(t) \quad (2)$$

其中, 序号 i 与当前符号有关, $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数. 传统实现中要求 $g_k(t)$ 构成正交集.

在上面两个问题中, 正交性约束是必需的吗? 或者说非正交必然导致差错性能的下降吗? 非正交有什么好处呢? 本文的工作是在突破此约束的基础上, 试图对这些问

题进行回答. 从而不仅提出了新的更有效的调制方法, 而且丰富了调制理论, 为数字通信的调制方法开辟了更广阔的道路.

差错性能和频带利用率是数字通信系统最重要的性能. 正交性约束与两者关系密切, 对前面两个问题: (a) 从差错性能上看, 正交性保证了可以通过匹配滤波实现无符号间串扰 (ISI) 的最佳接收. 从频带利用率上看, Nyquist 在文献 [1] 中表明: 带宽为 W 的基带系统中, 若抽样时刻不存在符号间串扰, 符号速率 R_s 的极限值为 $2W$ (奈奎斯特速率), 即 $R_s/W = 2$ 码元 / s/Hz. 但此理想系统的冲激响应为无限长的 sinc 函数, 传输函数为矩形, 物理上不可实现. 在传统实现中, 为了高效地利用频谱, 获得接近奈奎斯特速率的传输效率, 必须使用具有陡峭边缘的滤波器, 比如升余弦滚降系统和部分响应系统^[2,3]. 但由于这两种滤波器在频域上仍是绝对带限的, 因此严格说并不能理想地得到. 因为实际滤波器的限制, 典型的 $R_s/W = 2$ 一般降至 $1.8 \sim 1.4$ 码元 / s/Hz^[4]; (b) 从差错性能上看, 正交性保证

了判决时信号集内各波形之间互不干扰,可以获得较小的误码率.从频带利用率上看,差错性能是以牺牲带宽作为代价的,为了保持数据速率,增大正交集中信号个数必然需要增加带宽,从而造成频带利用率下降.

本文探讨了非正交与差错性能和频带利用率的关系.我们证明,通过信号星座图设计,非正交可以获得与正交一样的差错性能.在此基础上,数值分析显示非正交的优势体现在频带利用率上.对前面的两个问题:(a)非正交方法突破了脉冲形状的限制,用简单的信号波形就可以获得接近奈奎斯特速率的传输效率;(b)非正交方法不仅需要的带宽要少于传统方法,而且在一定的条件下,差错性能和频带利用率可以同时提高.

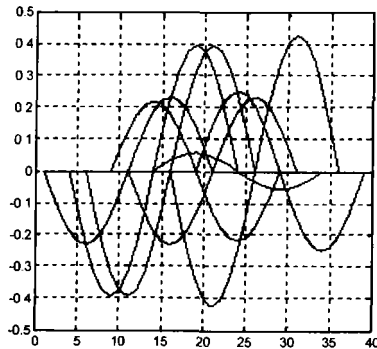


图 1 POOW 的 8 子波例子

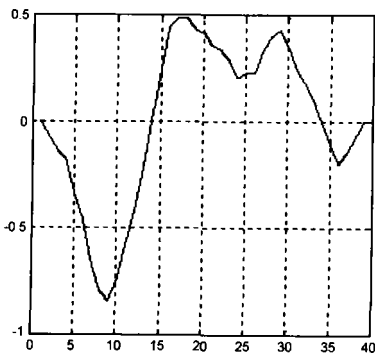


图 2 合成波

我们曾在文献 [5] 中提出了一种称为移相重叠波编码 (简称为 POOW) 的数字调制方法,其每个码元(合成波)由一系列调幅的正弦函数(子波)叠加而成.图 1 和 2 分别给出了一个叠加前后示意图.由于各个正弦函数互不正交,传统的解调方法已不适用,需要用解线性方程组的方法进行解调.这种调制方法与传统方法相比具有高得多的传输速率.计算机仿真结果是:在 ISDN 的信道 (0-40kHz) 上为 1.92M bps, 在 ADSL 信道 (240~1040kHz) 上高于 10M bps^[5].本文把 POOW 归结为更一般的形式——非正交多重调制 (Non-orthogonal Multiple Modulation), 简称 NOMM.本文从差错性能出发,将正交和非正交方式统一于星座图上进行分析,然后给出一种具体的 NOMM 实现方

法,其频带利用率性能优于满足正交约束的传统方法. NOMM 可以有基带和通带形式,本文以基带讨论为主,最后推广到通带式.

2 NOMM 的理论基础

NOMM 的本质是在多个信号的重叠波形中检测包含其中的数字信息.下面给出 NOMM 的定义.已知 x 是 K 维随机矢量, y 是其到 $L^2(R)$ 空间的线性映射:

$$y = Gx \quad (3)$$

其中, $x = [x_0, x_1, \dots, x_{K-1}]^T$, 矢量 x 可能的取值个数为 L , $G = [g_0, g_1, \dots, g_{K-1}]$, 各列矢量线性无关但不要求一定正交,且满足

$$g_k^T g_k = \int_0^T g_k^2(t) dt = 1 \quad (4)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, K-1$ 在此系统中, y 称为合成波, x 称为信号矢量, $x_k g_k$ 称为子波.可知,其比特传输率为

$$R_b = \frac{\log_2 L}{T} \quad (5)$$

这里未给出 x 如何取值以及 G 的具体形式,将在后两节分别讨论.显然,对于上一节的两个问题,式 (1) 和 (2) 均符合上述定义,可视为满足正交性约束的特例.而 POOW 是非正交的一个例子.这样, NOMM 将正交和非正交统一起来,或者说正交是 NOMM 的特例.

考虑经过 AWGN 信道后的解调问题,即 $y' = y + n$ 其中加性高斯白噪声矢量 n 的单边功率谱密度为 n_0 .为保证判决得到的信号矢量所对应的合成波与接收波 y' 最相似,应采用最大似然法^①,即在信号矢量集中寻找使得 $P(y' | x)$ 或如下等效函数取得最大值的 x :

$$f(x) = x^T G^T y' - \frac{1}{2} x^T R x \quad (6)$$

其中 $R = G^T G$. 因为 $f(x)$ 是高斯随机变量,判决 x 出错的概率可由计算 $L-1$ 维联合概率密度函数的积分得到.考察一个简单的模型:

$$p_{ij} = P(f(x_j) < f(x_i) | x = x_i), \quad i \neq j \quad (7)$$

其中, x_i, x_j 是 L 个信号矢量中不同的两个, p_{ij} 是 x_i 被错判成 x_j 的条件概率的下限,则可用下式表示^[6]

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{d_{ij}}{\sqrt{4n_0}} \right] \quad (8)$$

其中 $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^T R (x_j - x_i)}$. 一方面,信号矢量中最小的 d_{ij} 称为自由距离 (free distance), 决定了 NOMM 的差错性能.另一方面,应选择自由距离尽量大的信号矢量设计方法,以得到最佳差错性能.

3 信号星座图设计

可以从两个途径改善信号矢量的距离特性,一是信号

① 文献 [5] 中 POOW 用解方程方法进行解调,但从最大似然估计的角度上看,解方程并不是最优的方法.

星座图设计, 即选择信号点更易区分的信号点集, 二是利用差错控制编码, 利用结构冗余检测和纠正错误. 本文只研究前者.

M-PAM 的星座图是一维的, MQAM 是二维的, 而 NOMM 的信号点分布在以 G 各列矢量为基的 K 维星座图上. 式 (8) 中的 d_{ij} 即相应坐标下信号点之间的欧氏距离. 可先将 G 变换为标准正交基, 然后在此坐标系下设计距离特性良好的星座图. 这样, NOMM 与传统调制方法的星座图设计就统一起来了, 传统的星座图设计都能够为 NOMM 所用, 实现相同的差错性能. 由于 R 是正定的, 则存在 K 阶实矩阵 P , 使得

$$PRP^T = I \tag{9}$$

则 GP^T 各列矢量即为标准正交基. 式 (3) 修改为

$$y = GP^T x \tag{10}$$

式 (6) 变为

$$f(x) = x^T P G^T y' - \frac{1}{2} x^T x \tag{11}$$

注意到满足式 (9) 的 P 有无数个. 这是因为, 对于任何一个满足该式的 P 矩阵, 其左乘任何正交矩阵仍然满足该式.

近些年来, 星座图设计的重点在于研究适用于带宽受限系统, 即具有高密度信号点的星座图形状问题. 下面给出其中最简单的一种模式.

立方体模式——正交坐标系下, 星座图含有 $L = M^K$ 个信号点, 均匀分布在以原点为中心的 K 维立方体上, 每维 M 个. 即式 (10) 中 x 各元素相互独立, 且等概率地在实数轴上关于原点对称的 M 个等间隔点上取值. 假设间隔为 $2A$, 可得自由距离为

$$m \text{ ind}_j = \frac{2A}{\sqrt{E(x^T x)}} = \sqrt{\frac{12}{K(M^2 - 1)}} \tag{12}$$

这里, 利用了推导结果 $E(x^T x) = A^2 K (M^2 - 1) / 3$ 使自由距离用信号矢量的平均功率归一化^[7]. 可知, 这种星座图相当于 M-PAM 在 k 维空间的推广, 若 x 采用格雷码分配比特, 差错性能可用下式表示

$$P_b \approx \frac{(M - 1)}{M \log M} \operatorname{erfc} \left[\frac{\sqrt{3 \log_2 M}}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{E_b}{n_0} \right) \right] \tag{13}$$

对于此模式, 由式 (12)、(13) 可知, 信号点数的增多是以牺牲功率作为代价的. 利用现有的研究成果, 如用球面体星座图代替立方体星座图^[8, 9], 又如在星座图中用其他形状网格代替矩形网格^[10], NOMM 也可进行这方面的设计, 本文对此不作讨论.

除了上述模式, 还有其他类型的星座图. 我们知道, 波形编码是一种使得码后波形尽可能不同的技术, 也可以用来设计星座图. 其中, 正交码、双正交码和单纯码应用比较普遍. 下面结合正交码给出相应的星座图设计模式, 其余两种编码的设计也是类似的.

正交码模式——正交坐标系下, 星座图含有 $L = K$ 个信号点, 分布在以原点为球心的 K 维球面上, 且任两个信

号点对应矢量正交. 则式 (10) 中 x 可以是单位阵 I 的各列矢量. 此模式下自由距离为

$$d_j = \sqrt{2} \tag{14}$$

此模式差错性能与 MFSK 一样, 其误比特率具有上限^[12]

$$P_b \leq \frac{K}{4} \operatorname{erfc} \left[\frac{\sqrt{\log_2 K}}{\sqrt{2}} \left(\frac{E_b}{n_0} \right) \right] \tag{15}$$

由式 (14)、(15) 可知, 与 MFSK 一样, 该模式的差错性能随着信号点数的增大而提高, 而这是以牺牲带宽和增加系统复杂度作为代价的, 因此适用于功率受限系统.

根据式 (11) 考虑解调问题, 框图可用图 3 大致表示. 在相乘器中, 上面两种模式均将输入矢量与 P 相乘. 在判决器中, 立方体模式进行 M 进制判决即可, 而正交码模式根据输入矢量最大值的位置决定输出. 这个解调器的复杂度在于匹配滤波器个数以及乘法运算量. 后面可以看到, 利用 G 和 P 的性质能使该解调器得到简化, 从而降低复杂度.

上面两个例子中, 立方体模式的差错性能与传统的 M-PAM、MQAM 是一样的, 而正交码模式的差错性能与 MFSK 相同. 可见, 对于可达到的差错性能, NOMM 的正交性约束不是必需的. 若 G 非正交, 只要在发送端和接收端分别用 P 进行线性变换, 就可以消除不同符号之间的串扰或干扰, 即获得正交时的差错性能. 在此基础上, 下一节讨论其频带利用率性能, 并与正交的方法进行比较.

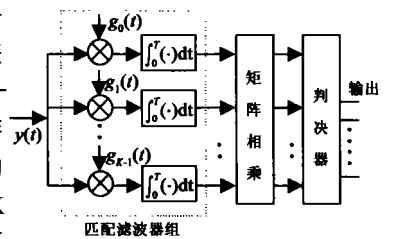


图 3 解调器结构

4 频带利用率的数值计算

NOMM 的频带利用率性能取决于 G 的具体形式. 因为非正交, 其构造方式可以有多种, 这里给出一种基带系统的实例. 类似于图 1 所示的 POOW, 令 g_k 由基带信号 g 依次延时构成, 即

$$g_k(t) = g(t - kT_s) \tag{16}$$

设 g 的脉冲持续时间为 T_d , 则合成波的长度

$$T = (K - 1)T_s + T_d = [(K - 1) \mu + 1] T_d \tag{17}$$

其中, $\mu = T_d / T_s$. 对这个基带系统, 由式 (10)、(16) 得到其随机序列为

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{K-1} p_{ki} x_m \right) g(t - kT_s - nT) \tag{18}$$

其中, p_{ki} 即 P 的元素, x_m 表示第 n 个符号所对应信号矢量的第 i 个元素. 获得此随机序列频谱的解析式是困难的. 本文不准备在这方面进行理论探讨, 而以数值计算来说明

问题

首先需要确定 g 的波形, 这里采用传统的升余弦脉冲, 即滚降系数为 1 的升余弦函数, 其时域波形和能量谱如图 4 和图 5 所示. 这种脉冲很容易产生, 频谱衰减速度快, 有较小的时间带宽积 WT_d ($= 1.41$), 这里 W 定义为 99% 功率带宽, 即满足

$$\int_{-2\pi\omega}^{2\pi\omega} |G(\omega)|^2 d\omega = 0.99 \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (19)$$

其中 $G(\omega)$ 为升余弦脉冲的频谱. 目前的实验数据表明, 与其他常用脉冲相比, 如矩形、半周期正弦、高斯脉冲等, 升余弦脉冲表现更好. 在传统的正交方法中, 升余弦脉冲虽然具有上述优点, 但作为基带波形其效率并不高, 因为 $R_b/W = 1/1.41 = 0.71$ 下面将看到, 利用非正交, 升余弦脉冲也可以获得较高的传输效率, 甚至接近奈奎斯特速率.

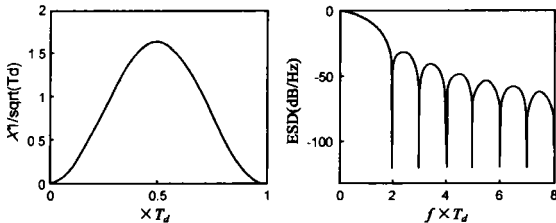


图 4 升余弦脉冲

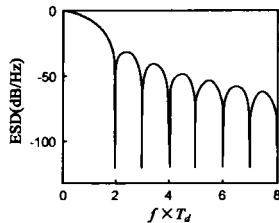


图 5 升余弦能量谱

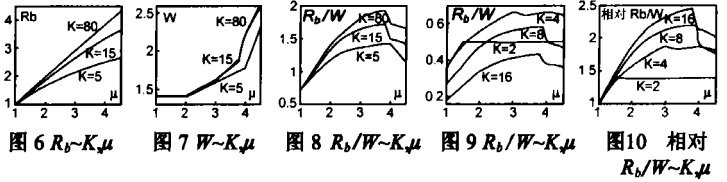
通过实验分析 K 和 μ 对频带利用率 R_b/W 的影响. 下面给出两组实验数据, 对于图 6~8 星座图为 $M=2$ 的立方体模式, 即 $L=2^k$, 则其差错性能与二进制 PAM 相同. 对于图 9~10 星座图为正交码模式, $L=K$ 分别取 2, 4, 8 和 16, 则其差错性能与相应进制的 FSK 相同. 这里, R_b 由式 (5)、(17) 获得, W 通过计算随机序列频谱的 99% 功率带宽得到. 各图中每条曲线反映了 K 相同下各项指标关于 μ 的变化情况. 其中, 当 $\mu=1$ 时, 子波之间不交叠而正交, 即为传统的方法.

图 6~8 中, 对 K 相同的曲线, 当 $\mu=1$ 时, $R_b/W = 0.71$. 随着 μ 的增大, R_b 和 W 的基本趋势都是上升, 但前者增长更快, 故 R_b/W 亦上升. 在 $\mu=3.8$ 附近 R_b/W 达到峰值. 峰值之后, 当 μ 继续增大, 此时 W 的增长超过了 R_b , 因此 R_b/W 开始持续下降. 此外, 各曲线随着 K 的增大而趋于接近, 当 K 较大时 R_b/W 的峰值趋近于极限 2 即奈奎斯特速率. 即使在 $K=5$ 时, 其峰值为 1.41 几乎为正交时的两倍.

对于另一组实验, 从图 9 可见, R_b/W 同样在 $\mu=3.8$ 附近达到峰值. 并且, NOMM 的 R_b/W 和差错性能可以同时提高, 这是传统方法不能实现的. 比如 $K=2, \mu=1$ 处, $R_b/W = 0.71/2 = 0.355$ 在 K 为 4, 8, 16 的各曲线上均有超过这个值的点, 而且这些曲线本身差错性能就更高. 图 10 中的相对 R_b/W 是指相同 K 下非正交的 R_b/W 相对正交的增益.

5 NOMM 系统复杂度

前面的结果说明, 在一定条件下, 非正交的频带利用率是可以优于正交方法的, 而且差错性能相同, 而这一优



势是以增大复杂度作为代价. 下面就以前一节给出的系统为例, 讨论如何降低复杂度这一问题.

在解调器的匹配滤波器组方面, 由式 (16), 可知图 3 中各个匹配滤波器的输出也存在延时关系. 利用这一点, 对单个滤波器的输出以 $1/T_s$ 频率进行 K 个点的抽样即可替代滤波器组, 故解调器可以得到简化.

另一方面, 如何快速实现 P 矩阵相乘对实时性要求至关重要, 这是本节讨论的重点. 首先分析如何获得 P . 因为 R 的对称正定性, 可以进行特征值分解:

$$R = V \Sigma V^T \quad (20)$$

其中, Σ 是以 R 的特征值为 $\lambda_0, \dots, \lambda_{K-1}$ 主对角线的对角阵, V 为正交矩阵, 且其列矢量是对应的特征矢量. 对比式 (9)、(20), 显然可以选取

$$P = \Sigma^{-0.5} V^T \quad (21)$$

下面介绍两种减少 P 矩阵乘法次数的途径, 分别针对一般的和特殊的 R 矩阵. 一是将满足式 (9) 的 P 进行 QR 分解, 即有

$$QP = \Delta \quad (22)$$

其中, Q 和 Δ 分别为正交矩阵和上三角矩阵. Δ 等于 P 左乘一个正交矩阵, 因此用它代替 P 亦满足式 (9). 这样, 所需乘法次数可以减少将近一半, 即从 $K \times K$ 减至 $K \times (K+1)/2$. 另一途径是, 当按照式 (21) 选取 P 时, 若 V 代表的正交变换有快速算法, 那么 P 的乘法可以分解为正交变换和对角阵 $\Sigma^{-0.5}$ 对应的 K 次乘法. 我们注意到在前一节的 NOMM 系统中, R 实际上是 Toeplitz 阵. 这种矩阵的特征值问题常常涉及到快速算法, 因而可以利用来减少系统复杂度. 例如, 当取 $\mu=2$ 时有

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & 0 \\ \beta & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & & \beta \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (23)$$

这里 $\beta = 1/6$ 此 Toeplitz 矩阵被称为三对角的 (tridiagonal), 其特征值和特征矢量分别为

$$\lambda_j = 1 - 2\beta \cos \left[\frac{\pi(K-j)}{K+1} \right] \quad (24)$$

$$V[i, j] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K+1}} \sin \left[\frac{\pi(i+1)(j+1)}{K+1} \right] \quad (25)$$

其中 $i, j = 0, \dots, K-1$. 若 K 等于 2 的某次幂减 1, 如 63, 则矩阵 V 的乘法被称为 1 型离散正弦变换 (DST-I)^[11]. 研究指出此变换有快速算法^[12], 如当 $K=63$ 时, 乘法次数从 $63 \times 63 = 3969$ 减少到仅 130. 总之, 利用矩阵分解和特征值等问题确能显著降低 NOMM 系统的复杂度, 这方面更多的设

计和算法有待于进一步的研究.

6 讨论

NOMM 利用非正交性提高了频带利用率. 需要指出的是, 部分响应信号实际也利用了非正交的思想, 虽然该系统相对容易实现, 但由于频域上仍是绝对带限的, 因此严格说并不能理想地得到. 此外, 它通过相关编码来消除 ISI 的同时也降低了差错性能. 而本文提出的 NOMM 则完全不同, 脉冲成形容易实现, 消除 ISI 也不会使差错性能有所降低.

从基带很容易推广到单载波调制系统和多载波系统, 即两路独立的 NOMM 合成波分别用载波或子载波的正交和同相分量传输. 在正交频分复用系统 (OFDM)^[13] 中, 一般采用矩形脉冲以保证没有信道间干扰 (ICI). 由于在频域上频谱是 sinc 函数, 在带外产生较大的干扰. 利用非正交, 我们得到了一种多载波调制方法, 时域同样采用升余弦脉冲. 仿真实验表明其带外干扰很小, 16 个子信道下 -40dB 带宽仅为 -3dB 带宽的 2 倍, 且未使用滤波器和加窗 (Windowing), 而传统方法下即使在 256 个子信道下两者之比也为 4 倍 (功率谱下降速度随子信道数增加而加快), 因此大大优于传统方法. 而且利用升余弦脉冲本身的性质, 在进行 FFT 和 IFFT 时也非常方便. 我们将在其他文章中详细介绍这方面的工作.

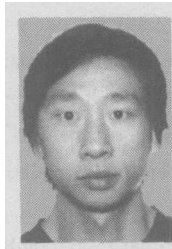
参考文献:

- [1] Nyquist H. Certain topics of telegraph transmission theory [J]. AIEE Trans, 1928, 47: 617-644
 - [2] Lender A. The duobinary technique for high speed data transmission [J]. IEEE Trans Commun Electron, 1963, 82: 214-218
 - [3] Lender A. Correlative digital communication techniques [J]. IEEE Trans Commun Technol, 1964, COM-12(4): 128-135
 - [4] Sklar B. 数字通信: 基础与应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2002: 401
 - [5] 梁德群, 等. 移相重叠载波技术 [J]. 电子科学学刊, 2003, 20(2): 121-127
- Liang D Q, et al The phase-offset overlapped wave technique [J]. Journal of Electronics, 2003, 20(2): 121-

127 (in Chinese)

- [6] Forney G D. The viterbi algorithm [J]. Proc IEEE, 1978, 61(3): 268-278
- [7] Thapar H K. Real time application of trellis coding to high speed voice band data transmission [J]. IEEE J Sel Areas Commun, 1984, SAC-2(5): 648-658
- [8] Forney G D, et al The V. 34 high-speed modem standard [J]. IEEE Commun Mag, 1996, 34(12): 28-33
- [9] Wilson S G, et al Four dimensional modulation and coding an alternative to frequency reuse [A]. Proc IEEE Int'l Commun Conf ICC'84, v(2) [C]. New York: IEEE, 1984, 919-923
- [10] Foschini G J et al Optimization of two dimensional signal constellations in the presence of Gaussian noise [J]. IEEE Trans Commun, 1974, COM-22(1): 23-38
- [11] Jain A K. A fast Karhunen-Loeve transform for a class of stochastic processes [J]. IEEE Trans Commun, 1976, COM-24: 1023-1029
- [12] Yip P, et al A fast computational algorithm for the discrete sine transform [J]. IEEE Trans Commun, 1980, COM-28(2): 304-307
- [13] Weinstein S B, et al Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete Fourier transform [J]. IEEE Trans Commun, 1971, 19: 628-634

作者简介:



曹祁生 男, 1978 年 11 月生于湖南祁东, 现为大连海事大学信息工程学院博士研究生, 研究方向为信号处理.

E-mail: stal@newmail.dhu.edu.cn



梁德群 男, 1940 年 12 月生于辽宁大连, 大连海事大学信息工程学院教授, 博士生导师, 研究领域为模式识别、图像处理和信号处理.